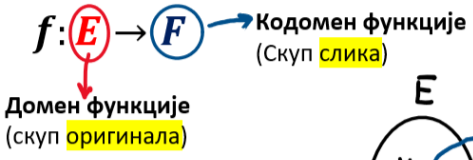
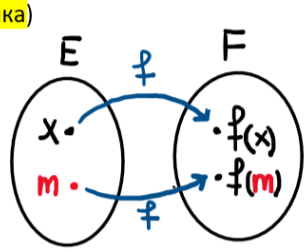
ФУНКЦИЈЕ (пресликавања)

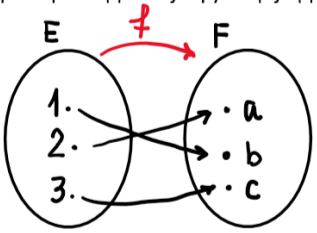
Деф: Нека су E и F два непразна скупа. Свако правило (закон, пропис) f, којим се **сваком елементу из скупа E** придружује (додељује) **тачно један елемент из скупа F** назива се **пресликавање (функција)** скупа E у скуп F, и то се обележава са: $f: E \to F$.





Пример 1: Проверити да ли је функција дефинисана на следећим скуповима.

а)

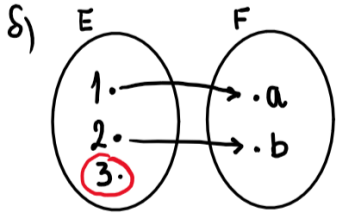


Јесте функција, зато јер **СВАКИ** елемент из скупа E, има **ТАЧНО ЈЕДАН** елемент у који се слика у скупу F

$f(1) = b \quad f(2) = a$

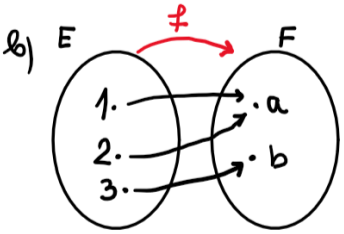
$f(3) = c$

б)



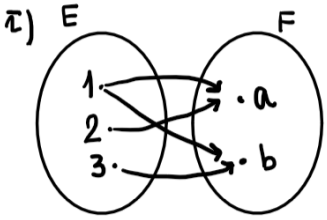
Није функција, јер се 3 није пресликала нигде.
Дакле, немамо слику од 3.

в)



Јесте функција, јер **СВАКОМ** елементу из скупа E додељен је **ТАЧНО ЈЕДАН** елемент из скупа F.
И 1 и 2 се сликају у a, то је могуће, јер је могуће да две различите особе буду на једном месту у исто време.

г)

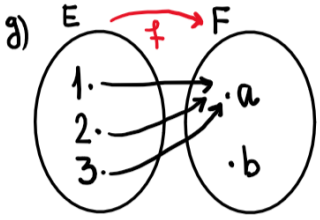


Није функција, јер се 1 слика у две Ствари, а то по дефиницији није могуће. Дакле, не може једна особа да буде у исто време на два потпуно различита места.

$f(1) = a$
$f(1) = b$

(ова стрелица се чита Као **контрадикција,** а то значи да није могуће нешто.)

д)



Јесте функција, јер **СВАКОМ** елементу из скупа E придружен је **ТАЧНО један** елемент из скупа F.

Дакле, могуће је да три различите особе буду у исто време на једном месту.

$f(1) = f(2) = f(3) = a$

Деф: За функцију $f: E \to F$ кажемо да је **инјективна** (инјекција или "**1-1**" (један један) пресликавање), ако важи један од следећа два услова:

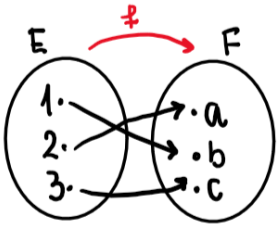
1° $\forall x_1, x_2 \in E$, $\boxed{x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)}$ (различитим оригиналима одговарају различите слике)

или

2° $\forall x_1, x_2 \in E$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (ако су слике једнаке, онда су оне настале од једнаких оригинала)

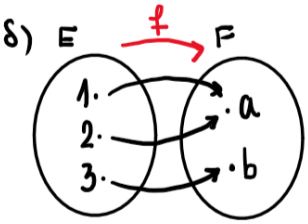
Пример 2:

а)



Јесте функција
Јесте "1-1"
Видимо да се сви различити из скупа E пресликавају у све различите из скупа F.

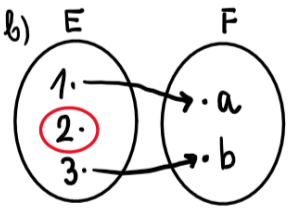
б)



Јесте функција
Није "1-1"

$1 \neq 2$ али $f(1) = f(2) = a$

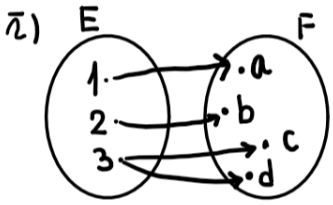
в)



Није функција, па самим тим не може ни да буде "1-1".

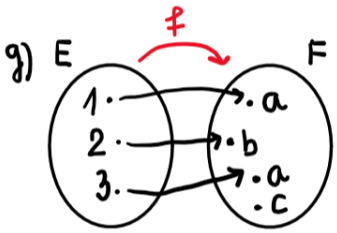
$f(2) = ?$

г)



Није функција, јер се број 3 слика у два елемента, а то по дефиницији није могуће.
Самим тим, онда, не може бити ни "1-1" пресликавање.

д)



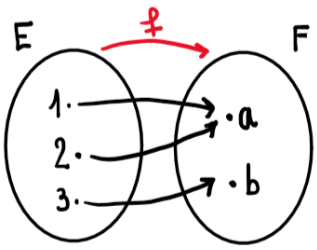
Јесте функција,
Није "1-1" пресликавање, јер 1 и 3 се сликају у исту вредност

$1 \neq 3 \quad f(1) = a = f(3)$

Деф: За функцију $f: E \to F$ кажемо да је **сурјективна** (сирјективна , сирјекција или "**на**" пресликавање), ако важи следећи услов:

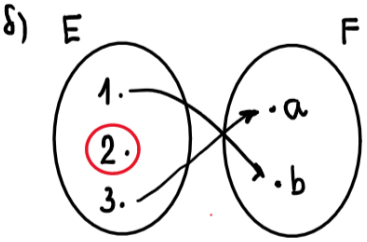
$(\forall y \in F)\ (\exists x \in E)\quad f(x) = y$ (за сваку тачку из кодомена, постоји тачка из домена од које је она настала.)

а)



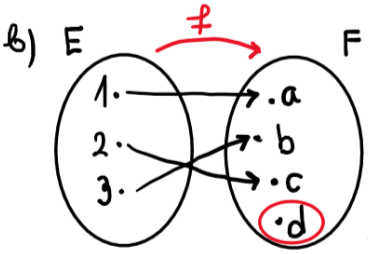
Јесте функција
Није "1-1", јер и 2 и 1 се сликају у исту вредност
Јесте "на", јер сваки елемент из скупа F, има свој оригинал од ког је настао.

б)



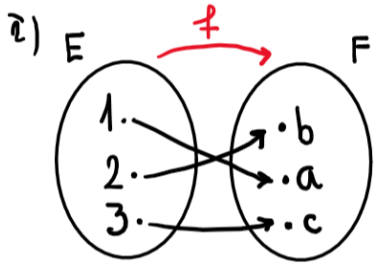
Није функција, па самим тим не може ни да буде "1-1", а не може ни да буде "на" пресликавање.

в)



Јесте функција
Јесте "1-1", али **није "на"**.
Зато јер елемент d, нема свог пара од ког је настао.

г)

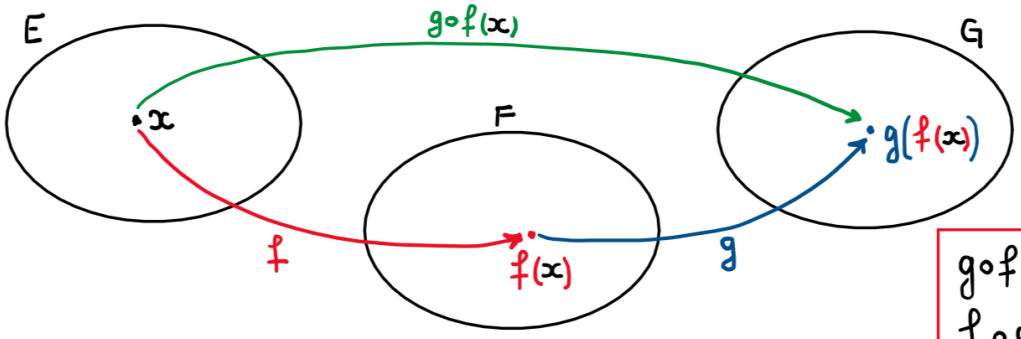


Јесте функција, јер сваки елеемнт из првог скупа има тачно један елеемнт из другог скупа у који се слика.
Јесте "1-1", јер сви различити елеемнти из првог скупа се сликају у све различите елементе из другог скупа
Јесте "на" , јер сваки елеемнт из скупа F , има свој оригинал у скупу E од ког је настао.

Деф: За функцију $f: E \to F$ која је и **"1-1" и "на"** (и инјекција и сурјекција) кажемо да је **бијекција** или **бијективно пресликавање** (бијективна функција).

КОМПОЗИЦИЈА ПРЕСЛИКАВАЊА
(Сложена функција)

Деф: Нека су E, F и G непразни скупови и нека $f: E \to F$ и $g: F \to G$. Тада је $g \circ f(x)$ сликање скупа E у G и важи да је $g \circ f(x) = g(f(x))$. Такво пресликавање назива се **композиција функција и или сложено пресликавање**.



$g \circ f(x) = g(f(x))$
$f \circ g(x) = f(g(x))$

Композиција пресликавања **није комутативна** операција. Дакле,

$f \circ g(x) \neq g \circ f(x)$!!!

ПАЖЊА: $g^2 = g \circ g(x) = g(g(x))$

$g \circ f \circ g(x) = g(f(g(x)))$

$f^4(x) = f \circ f \circ f \circ f(x) = f(f(f(f(x))))$

1. **Нека су дата пресликавања $f(x) = 3x - 5$ и $g(x) = 2x + 3$. Одредити:**
   $a)\ f \circ g(x)$ $b)\ g \circ f(x)$

a) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x+3) = 3 \cdot (2x+3) - 5 = 6x + 9 - 5 = 6x + 4$

б) $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(3x-5) = 2 \cdot (3x-5) + 3 = 6x - 10 + 3 = 6x - 7$ #

ПОЈАШЊЕЊЕ: АКО ЈЕ $f(x) = 3 \cdot x - 5$; ОНДА ЈЕ:

Уместо x мењамо оно што стоји у загради.

$f(5) = 3 \cdot 5 - 5$
$f(*) = 3 \cdot * - 5$
$f(\blacksquare) = 3 \cdot \blacksquare - 5$
$f(ш) = 3 \cdot ш - 5$
$f(2x+3) = 3 \cdot (2x+3) - 5$

2. **Нека су дата пресликавања $f(x) = 3x + 5$ и $g(x) = 4x + 6$. Одредити:**
   $a)\ f \circ g(6)$ $b)\ g \circ f(x)$ $v)\ g \circ f(2)$

а) $f \circ g(6) = f(g(6)) = f(4 \cdot 6 + 6) = f(30) = 3 \cdot 30 + 5 = 95$

У функцији g(x), свугде где је x , ми пишемо број 6.

$g(x) = 4 \cdot x + 6 \Rightarrow g(6) = 4 \cdot 6 + 6 = 24 + 6 = 30$
$f(x) = 3 \cdot x + 5 \Rightarrow f(30) = 3 \cdot 30 + 5 = 95$

б) $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(3x+5) = 4 \cdot (3x+5) + 6 = 12x + 20 + 6 = 12x + 26$

$g(x) = 4x + 6 \Rightarrow g(\blacksquare) = 4 \cdot \blacksquare + 6 \Rightarrow g(3x+5) = 4 \cdot (3x+5) + 6$

b) $g \circ f(2) = g(f(2)) = g(3 \cdot 2 + 5) = g(11) = 4 \cdot 11 + 6$

↳ У функцију f(x), свугде где је x, пишемо број 2.

3. Нека је $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и нека је $f(x) = x - 1$ и $g(x) = x^2$. Одредити:
$a)\ f \circ g(0)$ $b)\ g \circ f(1)$ $v)\ f \circ g(x)$ $g)\ g \circ f(x)$ $d)\ f \circ f(x)$ $đ)\ g \circ g(3)$

a) $f \circ g(0) = f(g(0)) = f(0^2) = f(0) = 0 - 1 = -1$

δ) $g \circ f(1) = g(f(1)) = g(1-1) = g(0) = 0^2 = 0$

b) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 - 1 = (x-1) \cdot (x+1)$

г) $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x-1) = (x-1)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = x^2 - 2x + 1$

↳ КВАДРАТ БИНОМА: $(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$
$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

ђ) $f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x-1) = (x-1) - 1 = x - 2$

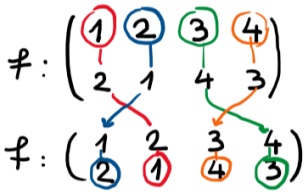
е) $g \circ g(3) = g(g(3)) = g(3^2) = g(9) = 9^2 = 81$

4. **Вене 101. задатак** Дате су функције $f\colon \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ и $g\colon \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Одредити:
$a)\ f^2 = f \circ f$ $b)\ f \circ g$ $v)\ g \circ f$ $g)\ f^2 \circ g$

a) $f^2 = f \circ f(x) = f(f(x))$

$x=1$: $f(f(1)) = f(2) = 1$
$x=2$: $f(f(2)) = f(1) = 2$
$x=3$: $f(f(3)) = f(4) = 3$
$x=4$: $f(f(4)) = f(3) = 4$

$f^2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

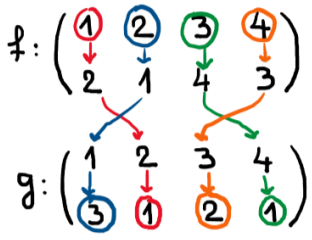


δ) $f \circ g(x) = f(g(x))$

$x=1$: $f(g(1)) = f(3) = 4$
$x=2$: $f(g(2)) = f(1) = 2$
$x=3$: $f(g(3)) = f(2) = 1$
$x=4$: $f(g(4)) = f(1) = 2$

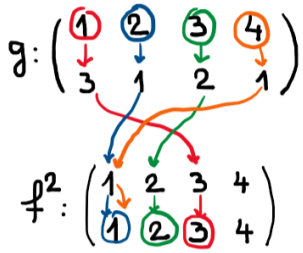
$f \circ g : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $g \circ f(x) = g(f(x))$



$g \circ f(x) : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

г) $f^2 \circ g(x) = f^2(g(x))$



$f^2 \circ g : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

5. Вене 100. задатак Дата је функција $f: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Одредити:

$a)\ f^2 = f \circ f$ $\quad b)\ f^3$ $\quad v)\ f^4$ (домаћи)

а) $f^2 = f \circ f(x) = f(f(x))$

$f: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

$f: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

$f \circ f: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

б) $f^3 = f \circ f \circ f(x) = f(f(f(x)))$

$f: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

$f: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

$f: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

$f^3: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

6. Дате су функције $f: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$ и $g: \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Одредити:

$a)\ f \circ g$ $\quad b)\ g \circ f$ $\quad v)\ f \circ g \circ f$

а) $f \circ g(x) = f(g(x))$

$g: \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$f: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$

$f \circ g: \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$

б) $g \circ f(x) = g(f(x))$

$f: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$

$g: \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$g \circ f: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

в) $f \circ g \circ f(x) = f(g(f(x)))$

$f: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$

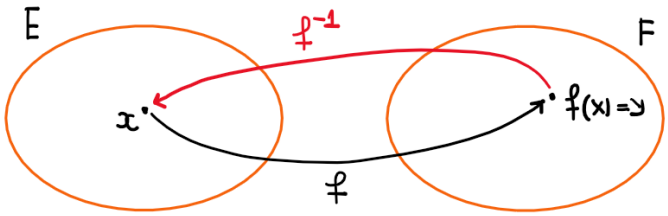
$g: \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$f: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$

$f \circ g \circ f: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ c & a & b \end{pmatrix}$

ИНВЕРЗНО ПРЕСЛИКАВАЊЕ (Инверзна функција)

Деф: Нека је пресликавање $f: E \to F$ **бијективно** ("1-1" и "на") тако да је $f(x) = y$. Нека је $x \in E$ и $y \in F$. Пресликавање $f^{-1}: F \to E$, тако да је за све $y \in F$, $f^{-1}(y) = x$, назива се **инверзно пресликавање или инверзна функција функције** f.



ВИДИМО: $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$

1. **Нека су дата пресликавања $f(x)=2x+4$, $h(x)=4x-5$ и $g(x)=-3x+2$. Одредити:**
   $a)$ $f^{-1}(x)$ $b)$ $g^{-1}(x)$ $v)$ $h^{-1}(x)$

а) $f(x)=2x+4$ $\quad f^{-1}(x)=?$

Приликом решавања оваквих задатака, увек крећемо од ове почетне формуле.

$f^{-1}(f(x))=x$

$f^{-1}(2x+4)=x$

Нама се тражи f^{-1} од само једног слова, а не од целог израза, зато морамо да **уведемо смену**.

СМЕНА: $2x+4=t$

$2x=t-4 \Rightarrow x=\frac{t-4}{2}$

Изразимо из ове једначине x

$f^{-1}(t)=\frac{t-4}{2}$

$f^{-1}(x)=\frac{x-4}{2}$

Нама се не тражи $f^{-1}(t)$, већ се тражи $f^{-1}(x)$, а то значи тамо где је t да пишемо x

Ово је поступак који се увек понавља, без обзира каква и која је функција у питању.

б) $g(x)=-3x+2$

$g^{-1}(g(x))=x$

$g^{-1}(-3x+2)=x$

СМЕНА: $-3x+2=t$

$-3x=2-t \Rightarrow x=\frac{2-t}{3}$

$g^{-1}(t)=\frac{2-t}{3}$

$g^{-1}(x)=\frac{2-x}{3}$

в) $h(x)=4x-5$

$h^{-1}(h(x))=x$

$h^{-1}(4x-5)=x$

СМЕНА: $4x-5=t$

$4x=t+5 \Rightarrow x=\frac{t+5}{4}$

$h^{-1}(t)=\frac{t+5}{4} \Rightarrow h^{-1}(x)=\frac{x+5}{4}$

2. **Вене 102. задатак : Дате су функције $f(x)=3x-5$ и $g(x)=5x-3$. Одредити:**
   $a)$ $f^{-1}(x)$ и $g^{-1}(x)$ $b)$ $f\circ g(x)$ $v)$ $f^{-1}\circ g^{-1}(x)$

а) $f(x)=3x-5$ $\quad f^{-1}(x)=?$

$f^{-1}(f(x))=x$

$f^{-1}(3x-5)=x$

смена: $3x-5=t$

$3x=t+5 \Rightarrow x=\frac{t+5}{3}$

$f^{-1}(t)=\frac{t+5}{3} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+5}{3}$

$g(x)=5x-3$ $\quad g^{-1}(x)=?$

$g^{-1}(g(x))=x$

$g^{-1}(5x-3)=x$

смена: $5x-3=t$

$5x=t+3 \Rightarrow x=\frac{t+3}{5}$

$g^{-1}(t)=\frac{t+3}{5} \Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{x+3}{5}$

б) $f\circ g(x)=f(g(x))=f(5x-3)=3\cdot(5x-3)-5=15x-9-5=15x-14$

в) $f^{-1}\circ g^{-1}(x)=f^{-1}(g^{-1}(x))=f^{-1}\left(\frac{x+3}{5}\right)=\frac{\frac{x+3}{5}+\frac{5}{1}}{3}=\frac{\frac{x+3+25}{5}}{\frac{3}{1}}=\frac{x+28}{15}$

$f^{-1}(x)=\frac{x+5}{3} \Rightarrow f^{-1}(*)=\frac{*+5}{3}$

$f^{-1}(\square)=\frac{\square+5}{3}$

$\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{x+5}{3}\right)=\frac{\frac{x+5}{3}+5}{3}$

3. **Вене 103. задатак**: **Одредити $f(x)$, ако је :**

$a)\ f(x+1)=5x-3 \qquad b)\ f(2x-3)=3x+1 \qquad v)\ f(3-2x)=2x+5 \qquad g)\ f(1-x)=3-2x$

домаћи задатак

Овакви задаци зову се „**функционалне једначине**" . Овде је идеја, слична као код инверзне функције. Оно што је у загради уведемо као смену, затим изразимо x.

а) $f(x+1)=5x-3 \qquad f(x)=?$

СМЕНА: $x+1=t \Rightarrow x=t-1$ Када изразимо непознату x, вратимо у почетну једначину.

$f(t)=5\cdot(t-1)-3=5t-5-3=5t-8 \Rightarrow \boxed{f(x)=5x-8}$

б) $f(2x-3)=3x+1$

СМЕНА: $2x-3=t \Rightarrow 2x=t+3 \Rightarrow x=\frac{t+3}{2}$

$f(t)=3\cdot\frac{t+3}{2}+\frac{1}{1}\overset{\cdot 2}{=}\frac{3t+9+2}{2}=\frac{3t+11}{2} \Rightarrow \boxed{f(x)=\frac{3x+11}{2}}$

в) $f(3-2x)=2x+5$

СМЕНА: $3-2x=t \Rightarrow 3-t=2x \Rightarrow x=\frac{3-t}{2}$

$f(t)=2\cdot\frac{3-t}{2}+5=3-t+5=8-t \Rightarrow \boxed{f(x)=8-x}$

4. **Вене 104. задатак:** **Дате су функционалне једначине $f(x+1)=3x+2$ и $g(2x+3)=2-3x$. Одредити:**

$a)\ f(x)$ и $g(x) \qquad b)\ f\circ g(x) \qquad v)\ f^{-1}\circ g(x)$

а) $f(x+1)=3x+2$

СМЕНА: $x+1=t \Rightarrow x=t-1$

$f(t)=3\cdot(t-1)+2=3t-3+2=3t-1$

$\boxed{f(x)=3x-1}$

$g(2x+3)=2-3x$

СМЕНА: $2x+3=t \Rightarrow 2x=t-3 \Rightarrow x=\frac{t-3}{2}$

$g(t)=\frac{2}{1}\overset{\cdot 2}{-}3\cdot\frac{t-3}{2}=\frac{4-3t+9}{2}=\frac{13-3t}{2}$

$\boxed{g(x)=\frac{13-3x}{2}}$

б) $f\circ g(x)=f(g(x))=f\left(\frac{13-3x}{2}\right)=3\cdot\frac{13-3x}{2}-\frac{1}{1}\overset{\cdot 2}{=}\frac{39-9x-2}{2}=\boxed{\frac{37-9x}{2}}$

в) $f^{-1}\circ g(x)=f^{-1}(g(x))$

Најпре треба да одредимо инверзну функцију функције f.

$\boxed{f^{-1}(f(x))=x}$

$f^{-1}(3x-1)=x$

СМЕНА: $3x-1=t \Rightarrow 3x=t+1$

$x=\frac{t+1}{3}$

$f^{-1}(t)=\frac{t+1}{3} \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x)=\frac{x+1}{3}}$

$f^{-1}(g(x))=f^{-1}\left(\frac{13-3x}{2}\right)=\frac{\frac{13-3x}{2}+\frac{1}{1}\overset{\cdot 2}{}}{3}$

$=\frac{\frac{13-3x+2}{2}}{\frac{3}{1}}=\boxed{\frac{15-3x}{6}}$

ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА и њен график

Функција облика $\mathbf{y = kx + n}$, $k, n \in \mathbb{R}$, $\mathbf{k \neq 0}$ назива се **линеарна функција**.
График линеарне функције је **права**.

Експлицитни облик једначине праве: $\mathbf{y = kx + n}$

$\mathbf{k}$ – коефицијент правца праве

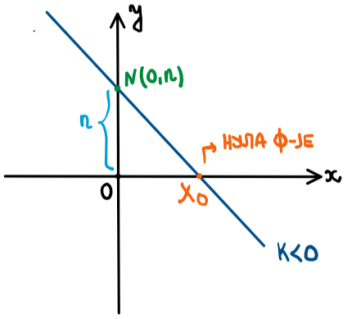
$\mathbf{k > 0}$, $\mathbf{f(x)} \nearrow$ растућа функција

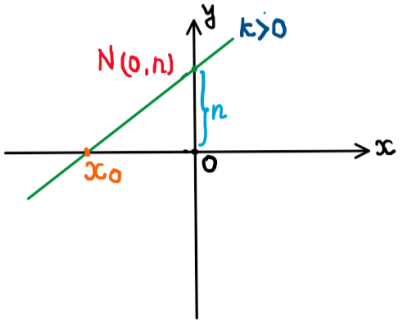
$\mathbf{k < 0}$, $\mathbf{f(x)} \searrow$ опадајућа функција

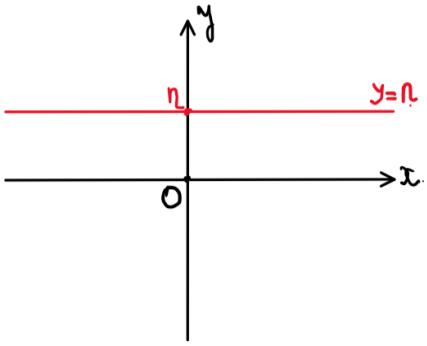
$\mathbf{k = 0}$, $f(x) \rightarrow$ константна функција

$\boldsymbol{n}$ – одсечак који права гради са $\boldsymbol{Y}$ осом

Имплицитни облик једначине праве: $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$







Нула функције је тачка на X - оси у којој график функције пресеца X - осу.

Нулу функције добијамо тако што у функцију убацимо $y = 0$. Дакле, заменимо уместо у пишемо 0 и израчунамо колико је x. То x које смо добили, то је заправо нула функције.

Пример:

$$y = 2x - 8$$

$y = 0$: $0 = 2x - 8$

$2x = 8$

$\boldsymbol{x = 4}$ – нула функције.

1. **Скицирати графике следећих функција:**

$\boldsymbol{a)}\ y = 2x - 4$ $\quad$ $\boldsymbol{b)}\ y = -3x - 9$ $\quad$ $\boldsymbol{v)}\ 2x - 4y + 8 = 0$

a) $y = 2x - 4$

$k = 2 > 0 \Rightarrow y \nearrow$

$n = -4$ $\quad N(0, -4)$

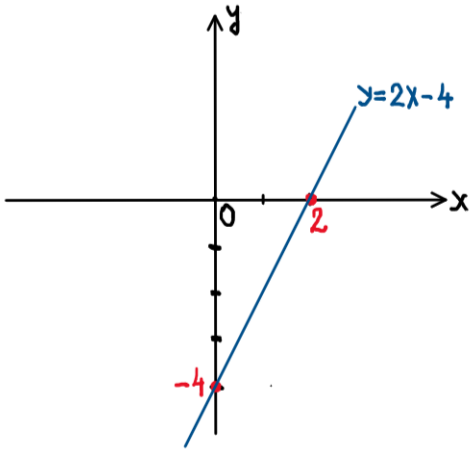
x	0	2
y	-4	0

$x = 0$: $y = 2 \cdot 0 - 4 = -4$

$y = 0$: $0 = 2x - 4$

$2x = 4$

$x = 2$



б) $y=-3x-9$

$k=-3<0$ $y\downarrow$

$n=-9$ $N(0,-9)$

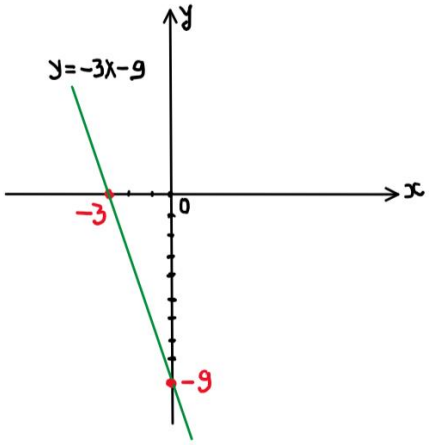
x	0	-3
y	-9	0

$x=0$: $y=-3\cdot 0-9=-9$

$y=0$: $0=-3x-9$

$3x=-9$

$x=-3$



в) $2x-4y+8=0$

$2x+8=4y \mid :4$

$\frac{2x}{4_2}+\frac{8^2}{4_1}=\frac{4y}{4}$

$y=\frac{1}{2}x+2$

$k=\frac{1}{2}>0$ $y\nearrow$

$n=2$

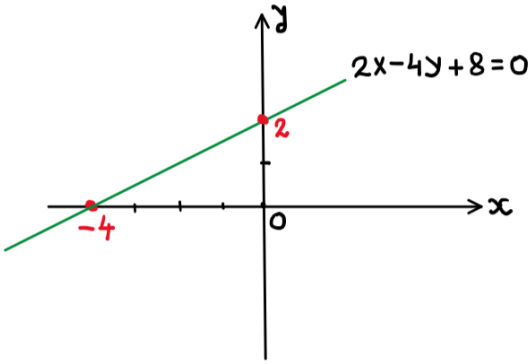
x	0	-4
y	2	0

$x=0$: $y=\frac{1}{2}\cdot 0+2=2$

$y=0$: $0=\frac{1}{2}x+2$

$\frac{1}{2}x=-2 \mid \cdot 2$

$x=-4$



Домаћи задатак: **Скицирати графике следећих функција**

1. $y=3x-5$
2. $y=-2x-7$
3. $y=4x-3$
4. $2x-5y+7=0$
5. $-3x-5y-2=0$